REPRINTED FROM:

THE COLLECTED PAPERS OF

Albert Einstein

VOLUME 7

THE BERLIN YEARS:
WRITINGS, 1918–1921

Michel Janssen, Robert Schulmann, József Illy, Christoph Lehner,
and Diana Kormos Buchwald
EDITORS

Daniel Kennefick, A. J. Kox, and David Rowe
ASSOCIATE EDITORS

R. Hirschmann, O. Moses, A. Mynttinen, A. Pringle, and R. Fountain
EDITORIAL ASSISTANTS

DOC. 52

Geometry and Experience

(pp. 382–386; 403)

Princeton University Press
2002

52. *Geometry and Experience*

[*Einstein 1921c*]

Expanded version of a lecture delivered on 27 January 1921 at a public session of the Prussian Academy of Sciences.

Published 1921 by Julius Springer (Berlin)

The first part of this document was originally published on 3 February 1921 in *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1921): 123–130 (*Einstein 1921b*). The occurrence of page breaks in *Einstein 1921b* is noted on this document in the margins: the page indication is followed by the first word or part of a word at the beginning of the page cited.

GEOMETRIE UND ERFAHRUNG

ERWEITERTE FASSUNG DES FESTVORTRAGES
GEHALTEN AN DER PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
AM 27. JANUAR 1921

VON

ALBERT EINSTEIN

MIT 2 TEXTABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

Die Mathematik genießt vor allen anderen Wissenschaften aus e i n e m Grunde ein besonderes Ansehen; ihre Sätze sind absolut sicher und unbestreitbar, während die aller andern Wissenschaften bis zu einem gewissen Grad umstritten und stets in Gefahr sind, durch neu entdeckte Tatsachen umgestoßen zu werden. Trotzdem brauchte der auf einem anderen Gebiete Forschende den Mathematiker noch nicht zu beneiden, wenn sich seine Sätze nicht auf Gegenstände der Wirklichkeit, sondern nur auf solche unserer bloßen Einbildung bezögen. Denn es kann nicht wundernehmen, wenn man zu übereinstimmenden logischen Folgerungen kommt, nachdem man sich über die fundamentalen Sätze (Axiome) sowie über die Methoden geeinigt hat, vermittels welcher aus diesen fundamentalen Sätzen andere Sätze abgeleitet werden sollen. Aber jenes große Ansehen der Mathematik ruht andererseits darauf, daß die Mathematik es auch ist, die den exakten Naturwissenschaften ein gewisses Maß von Sicherheit gibt, das sie ohne Mathematik nicht erreichen könnten. p. 123

An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so viel beunruhigt hat. Wie ist es möglich, daß die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt des menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich paßt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen? p. 124 [An]

Hieraus ist nach meiner Ansicht kurz zu antworten: Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklich-

keit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. Die volle Klarheit über die Sachlage scheint mir erst durch diejenige Richtung in der Mathematik Besitz der Allgemeinheit ge-
[1] worden zu sein, welche unter dem Namen „Axiomatik“ bekannt ist. Der von der Axiomatik erzielte Fortschritt besteht nämlich darin, daß durch sie das Logisch-Formale
[2] vom sachlichen oder anschaulichen Gehalt sauber getrennt
[3] wurde; nur das Logisch-Formale bildet gemäß der Axiomatik den Gegenstand der Mathematik, nicht aber der mit dem Logisch-Formalen verknüpfte anschauliche oder sonstige Inhalt.

Betrachten wir einmal von diesem Gesichtspunkte aus irgendein Axiom der Geometrie, etwa das folgende: Durch zwei Punkte des Raumes geht stets eine und nur eine Gerade. Wie ist dies Axiom im älteren und im neueren Sinne zu interpretieren?

Ältere Interpretation. Jeder weiß, was eine Gerade ist und was ein Punkt ist. Ob dies Wissen aus einem Ver-
[4] mögen des menschlichen Geistes oder aus der Erfahrung, aus einem Zusammenwirken beider oder sonstwoher stammt, braucht der Mathematiker nicht zu entscheiden, sondern überläßt diese Entscheidung dem Philosophen. Gestützt auf diese vor aller Mathematik gegebene Kenntnis ist das genannte Axiom (sowie alle anderen Axiome) evident, d. h. es ist der Ausdruck für einen Teil dieser Kenntnis a priori.

Neuere Interpretation. Die Geometrie handelt von Gegenständen, die mit den Worten Gerade, Punkt usw. bezeichnet werden. Irgendeine Kenntnis oder Anschauung wird von diesen Gegenständen nicht vorausgesetzt, sondern nur die Gültigkeit jener ebenfalls rein formal, d. h. losgelöst von jedem Anschauungs- und Erlebnisinhalte aufzufassenden

Axiome, von denen das genannte ein Beispiel ist. Diese Axiome sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes. Alle anderen geometrischen Sätze sind logische Folgerungen aus den (nur nominalistisch aufzufassenden) Axiomen. Die Axiome definieren erst die Gegenstände, von denen die Geometrie handelt. Schlick hat die Axiome deshalb in seinem Buche über Erkenntnistheorie sehr treffend als „implizite Definitionen“ bezeichnet. [5]

p. 125 [Diese]

Diese von der modernen Axiomatik vertretene Auffassung der Axiome säubert die Mathematik von allen nicht zu ihr gehörigen Elementen und beseitigt so das mystische Dunkel, welches der Grundlage der Mathematik vorher anhaftete. Eine solche gereinigte Darstellung macht es aber auch evident, daß die Mathematik als solche weder über Gegenstände der anschaulichen Vorstellung noch über Gegenstände der Wirklichkeit etwas auszusagen vermag. Unter „Punkt“, „Gerade“ usw. sind in der axiomatischen Geometrie nur inhaltsleere Begriffsschemata zu verstehen. Was ihnen Inhalt gibt, gehört nicht zur Mathematik. [6]

Anderseits ist es aber doch sicher, daß die Mathematik überhaupt und im speziellen auch die Geometrie ihre Entstehung dem Bedürfnis verdankt, etwas zu erfahren über das Verhalten wirklicher Dinge. Das Wort Geometrie, welches ja „Erdmessung“ bedeutet, beweist dies schon. Denn die Erdmessung handelt von den Möglichkeiten der relativen Lagerung gewisser Naturkörper zueinander, nämlich von Teilen des Erdkörpers, Meßschnüren, Meßlatten usw. Es ist klar, daß das Begriffssystem der axiomatischen Geometrie allein über das Verhalten derartiger Gegenstände der Wirklichkeit, die wir als praktisch-starre Körper bezeichnen wollen, keine Aussagen liefern kann. Um derartige Aussagen liefern zu können, muß die Geometrie dadurch ihres nur logisch-formalen Charakters entkleidet werden, daß [7]

den leeren Begriffsschemen der axiomatischen Geometrie er-
[8] lebbare Gegenstände der Wirklichkeit (Erlebnisse) zugeordnet werden. Um dies zu bewerkstelligen, braucht man nur den Satz zuzufügen:

Feste Körper verhalten sich bezüglich ihrer Lagerungsmöglichkeiten wie Körper der euklidischen Geometrie von drei Dimensionen; dann enthalten die Sätze der euklidischen Geometrie Aussagen über das Verhalten praktisch starrer Körper.

Die so ergänzte Geometrie ist offenbar eine Naturwissenschaft; wir können sie geradezu als den ältesten
[9] Zweig der Physik betrachten. Ihre Aussagen beruhen im
[10] wesentlichen auf Induktion aus der Erfahrung, nicht aber
[11] nur auf logischen Schlüssen. Wir wollen die so ergänzte Geometrie „praktische Geometrie" nennen und sie im folgenden von der „rein axiomatischen Geometrie" unterscheiden. Die Frage, ob die praktische Geometrie der Welt eine euklidische sei oder nicht, hat einen deutlichen Sinn, und ihre Beantwortung kann nur durch die Erfahrung geliefert werden. Alle Längenmessung in der Physik ist praktische Geometrie in diesem Sinne, die geodätische und astronomische Längenmessung ebenfalls, wenn man den Erfahrungssatz zu Hilfe nimmt, daß sich das Licht in gerader Linie fortpflanzt, und zwar in gerader Linie im Sinne der praktischen Geometrie.

p. 126 [Dieser] Dieser geschilderten Auffassung der Geometrie lege ich deshalb besondere Bedeutung bei, weil es mir ohne sie unmöglich gewesen wäre, die Relativitätstheorie aufzustellen. Ohne sie wäre nämlich folgende Erwägung unmöglich gewesen: In einem relativ zu einem Inertialsystem rotierenden Bezugssystem entsprechen die Lagerungsgesetze starrer Körper wegen der Lorentz-Kontraktion nicht den Regeln der euklidischen Geometrie; also muß bei der Zulassung von

Published by Julius Springer (Berlin, 1921). The document is composed of two parts. The first part (until the final paragraph of p. 13) was presented on 27 January 1921 and published on 3 February 1921 in *Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften* (Berlin). *Sitzungsberichte* (1921): 123–130. The second part was added for the separate publication by Springer. Manuscripts are available for both parts. The manuscript for the first part [1 011] consists of eight numbered pages; that for the second part [1 012], written on the verso of a typewritten "technical explanation" ("Technische Erläuterung") of an electrically powered dirigible by an unknown author, consists of six pages numbered from 10 to 15 in an unknown hand. The first part of the text was republished with minor stylistic changes in *Einstein 1934a*, pp. 119–127. Significant variations between the manuscripts and the published text are noted.

[1]The modern axiomatic method was introduced in *Hilbert 1899*. In his analysis of the foundations of geometry, Hilbert stressed the strict separation of geometric axioms from their intuitive content and an explicit formulation of valid rules of deduction.

[2]In the manuscript, "inhaltlichen und" is deleted before "sachlichen," and "bzw." is written instead of "oder."

[3]The manuscript has "streng genommen" deleted and replaced by "gemäß der Axiomatik."

[4]The manuscript has "der Vernunft" deleted and replaced by "einem Vermögen des menschlichen Geistes."

[5]*Schlick 1918*, pp. 30–37. Moritz Schlick refers to Hilbert's axiomatic method (see note 1) in this passage. For Einstein's reading of *Schlick 1918*, see Einstein to Moritz Schlick, 17 October 1919: "Tomorrow I will leave for a two-week trip to Holland and I have taken as my only reading your [book on] epistemology. This as proof of how much I enjoy reading it" ("Morgen fahre ich nach Holland für zwei Wochen und habe als einzige Lektüre Ihre Erkenntnistheorie mitgenommen. Dies zum Beweise dafür, wie gern ich drin lese").

[6]*Friedman 2001* points out one feature of Hilbert's program that was attractive for Einstein: it liberated him from a concept of geometry that restricted the subject of geometry to spaces of constant curvature and allowed him to use a purely analytic concept of space as given by Riemann's differential geometry.

[7]For earlier statements of Einstein's views on geometry, see *Einstein 1917a* (Vol. 6, Doc. 42), pp. 1–3, and Doc. 31, [p. 29]. Especially relevant for Einstein's concept of a practical geometry (see p. 6 of this document) is the attempt of grounding geometry in the possible motions of rigid bodies that was initiated in *Helmholtz 1868*. This led to a generalization of the Kantian concept of a pure geometry that encompassed all metric spaces of constant curvature (Euclidean, elliptic, and hyperbolic), but did not include spaces of variable curvature since they do not allow free mobility of rigid bodies. Einstein was certainly acquainted with *Helmholtz 1884* (it is mentioned in *Einstein 1917a* [Vol. 6, Doc. 42], p. 72). Helmholtz is also mentioned in *Solovine 1956*, p. viii, as one of the authors whose works on the foundation of science were read in the Olympia Academy.

See *Torretti 1978* for a history of foundational questions in geometry in the nineteenth century. A study of the relation of the present document to that tradition can be found in *Friedman 2001*.

[8]"(Erlebnisse)" is missing in the manuscript. Einstein's definition of "Erlebnis" as the basic element of phenomenal reality and the contrast to concepts corresponds to the usage in *Schlick 1918* (e.g., pp. 118–119).

[9]In the manuscript, "Die Sicherheit ihrer Aussagen beruht" is deleted and replaced by "Ihre Aussagen beruhen."

[10]In the manuscript, "Empirie" is deleted and replaced by "Induktion aus der Erfahrung."

[11]The manuscript has "auf der Unfehlbarkeit" deleted before "nur auf logischen Schlüssen."

[12]For a discussion of the role of the problem of the rotating disk in the development of general relativity, see *Stachel 1980*. A brief account of the theoretical argument is given in Einstein to Moritz Schlick, 21 May 1917 (Vol. 8, Doc. 343).

[13]Henri Poincaré's thesis of the conventionality of geometry that Einstein recapitulates here was formulated in *Poincaré 1902*. Poincaré, like Helmholtz, restricted geometry to spaces of constant curvature. But he especially stressed the point discussed here by Einstein (which Helmholtz already had noted in *Helmholtz 1884*, pp. 29–30) that it cannot be decided on empirical grounds which of these